概率论

考试：占比60%。
七个大题，多计算与证明，没有概念。
(难题一题选做)

第一章 事件及其概率

1. 概率的运算

$P(A)=1-P(\bar{A})$

$A\cap B=\phi$，$P(A\cup B)=P(A+B)=P(A)+P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，$P(\bigcup_{k=1}^{m}A_k)=\sum_{k=1}^{m}P(A_k)-\sum_{k\neq l}P(A_kA_l)+\cdots+(-1)^{m-1}P(\bigcap_{k=1}^{m}A_k)$

2. 古典概型

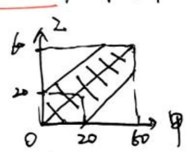
3. 几何概型

布丰投针：

$l\le d$，$\theta\le\frac{\pi}{2}$，$a<\frac{d}{2}$

$$P(A)=P(a\le\frac{l}{2}\sin\theta)=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{l}{2}\sin\theta d\theta}{\frac{d}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{2l}{\pi d}$$

约会问题：甲、乙相约7:00–8:00见面，到达时间等可能，先到达等待20分钟。



$$P=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}.$$

4. 概率的公理化体系

匹配问题：n封信随机投入n个信箱，至少一封信投入正确。

令A_i表示第i封信装入正确的信封

$P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$，$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$，$i\neq j$

$\cdots\cdots$ $P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)=\frac{1}{n!}$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i\neq j}P(A_iA_j)+\cdots+(-1)^{n-1}P(\bigcap_{i=1}^{n}A_i)$$
$$=1-\frac{1}{2!}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n!}\to 1-e^{-1}$$

拿枪模型、唱票模型
隔板法、多退少补原理(容斥)

5. 条件概率

定义：$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A)$.

全概率公式：$P(A)=\sum_{k=1}^{N}P(A|B_k)P(B_k)$　　$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})$

贝叶斯公式：$P(B_k|A)=\frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{k=1}^{N}P(A|B_k)P(B_k)}$　　$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$.

例：$P(A|B)=0.95$，$P(\bar{A}|\bar{B})=0.90$，$P(B)=0.0004$，求$P(B|A)$.

$P(A|\bar{B})=0.10$，$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})=0.10034$

$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}=0.0038$.

独立性：定义：$P(AB)=P(A)P(B)$.　　$P(A|B)=P(A)$.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

三个事件独立：$\begin{cases} P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \\ P(AB)=P(A)P(B),\ P(AC)=P(A)P(C),\ P(BC)=P(B)P(C). \end{cases}$

第二章 随机变量与分布函数

1. 随机变量与分布函数：

(i). 离散型随机变量：

(1). 退化分布．$X\sim\begin{pmatrix} C \\ 1 \end{pmatrix}$

(2). 两点分布．$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix}$．　$p+q=1$.

(3). 二项分布　$X\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & k & \cdots & n \\ q^n & npq^{n-1} & \cdots & C_n^k p^k q^{n-k} & \cdots & p^n \end{pmatrix}$．$p+q=1$

(4). Poisson 分布　$X\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & k & \cdots \\ e^{-\lambda} & \lambda e^{-\lambda} & \cdots & \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} & \cdots \end{pmatrix}$，$\lambda>0$．$X\sim P(\lambda)$.

$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=1$，$P(X\geqslant k)\approx P(X=k)$．（k足够大）

(5). 几何分布．$X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots \\ p & pq & \cdots & pq^{k-1} & \cdots \end{pmatrix}$.

(6). 超几何分布．N件产品M件次品．抽取n件．次品数X.

$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

(ii). 连续型随机变量：

密度函数 $p(x)\geqslant 0$．$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)dx=1$.

(1). 均匀分布：$X\sim p(x)=\begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x\in(a,b) \\ 0, & 其他. \end{cases}$　$X\sim U(a,b)$.

(2). 指数分布．$p(x)=\begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0 \\ 0, & 其他. \end{cases}$　$X\sim exp(\lambda)$.

$P(X>x)=e^{-\lambda x}$，$x\geqslant 0$.

(3). 正态分布．$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$　$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

$P(X>\mu+\sigma x)=\int_{\mu+\sigma x}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}du=\int_x^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du\rightarrow\frac{1}{\sqrt{2\pi}x}e^{-\frac{x^2}{2}}$．$x\to\infty$.

(iii). 一般随机变量：

定义：分布函数：$F(x)=P(X\leqslant x)$．注意范围

$F(-\infty)=0$．$F(+\infty)=1$.

$F(x)$单调不减　　$P(X<x)=F(x-0)$

$F(x)$左极限存在，右连续．　$P(X=x)=F(x)-F(x-0)$.

离散型随机变量的分布函数：阶梯函数.

连续型随机变量的分布函数. $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}p(u)du$

$$F'(x)=p(x).$$

(1). 均匀分布. $F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\le x<b\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$

(2). 指数分布. $X\sim \exp(\lambda)$. $p(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\end{cases}$

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & , x\ge 0\end{cases}$$

(3). 正态分布. $X\sim N(0,1)$.

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi(x).$$

2. 随机变量的变换：

例：$X\sim\exp(\lambda)$. $f(x)=\begin{cases}0 & , x\le 0\\ \log x & , x>0.\end{cases}$ $Y=f(X)$.

$$P(Y\le y)=P(\log X\le y)=P(X\le e^{y})=1-e^{-\lambda e^{y}}$$

例：$X\sim N(0,1)$. $Y=|X|$ 的分布.

$$P(Y\le y)=P(-y\le X\le y)=P(X\le y)-P(X\le -y)=\Phi(y)-\Phi(-y).$$

$$Y\sim p(y)=\Phi'(y)+\Phi'(-y)=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}, y\ge 0.$$

例：$X\sim N(\mu,\sigma^2)$. $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$ 的分布.

$$P(Y\le y)=P(X\le \mu+\sigma y)=\int_{-\infty}^{\mu+\sigma y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}}du=\int_{-\infty}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}du, \ Y\sim N(0,1).$$

一般地，$X\sim p_X(x)$. $f(x)$ 存在反函数 f^{-1} 可导. $Y=f(X)$.

$$Y\sim p_Y(y)=p_X(f^{-1}(y))\,|(f^{-1})'(y)|.$$

3. 随机向量与联合密度函数.

(1). 离散型随机向量：$p_{ij}=P(X=x_i, Y=y_j)$.

边际分布. $X\sim\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_i & \cdots\\ p_{1\cdot} & p_{2\cdot} & \cdots & p_{i\cdot} & \cdots\end{pmatrix}$. $Y\sim\begin{pmatrix}y_1 & y_2 & \cdots & y_j & \cdots\\ p_{\cdot 1} & p_{\cdot 2} & \cdots & p_{\cdot j} & \cdots\end{pmatrix}$.

条件分布. $P(Y=y_j|X=x_i)=\dfrac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$

$$Y|X=x_i\sim\begin{pmatrix}y_1 & \cdots & y_j & \cdots\\ \frac{p_{i1}}{p_{i\cdot}} & \cdots & \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} & \cdots\end{pmatrix}.$$

独立性：$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$ $\forall i,j$. $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$

(ii). 连续型随机向量:

联合密度函数 $p(x,y)$.

$P(X\le x, Y\le y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} p(u,v)\,du\,dv.$

边际分布: $X\sim p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dy.$

$Y\sim p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} p(x,y)\,dx.$

联合正态分布: $p(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}$

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho).$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)}dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\underline{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-\rho y)^2}}e^{-\frac{y^2}{2}}\underline{dx}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}1\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=1$$

边际分布: $X\sim p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\,\sigma_2}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}\left(y-\mu_2-\frac{\sigma_2\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}\right)^2}dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

条件分布. $P(Y\le y|X=x)=\lim_{\varepsilon\to 0}P(Y\le y\,|\,x-\varepsilon<X\le x+\varepsilon)=\frac{\int_{-\infty}^{y}p(x,v)\,dv}{p_X(x)}.$

$p_{Y|X}(y|x)=\frac{p(x,y)}{p_X(x)}.\qquad p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}$

例: $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$

$p_{X|Y}(x|y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}\,\sigma_1}e^{-\frac{\left(x-\mu_1-\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)^2}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}}$

$X|Y=y\sim N(\mu_1+\frac{\rho\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\ \sigma_1^2(1-\rho^2))$

$Y|X=x\sim N(\mu_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(y-\mu_1),\ \sigma_2^2(1-\rho^2))$

独立性: $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y).\ \forall x,y.$

$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho).\ X,Y$ 独立 $\Leftrightarrow \rho=0$

(iii). 一般随机向量:

$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y).$

$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0.\quad F(+\infty,+\infty)=1.$

$F(x,y)$ 关于 x,y 单调不减 - 左极限存在, 右连续.

$P(a<X\le b,\ c<Y\le d)=F(a,c)+F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)$

边际分布: $F_X(x)=F(x,+\infty).\ F_Y(y)=F(+\infty,y).$

条件分布: $P(Y\le y|X=x)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(x+\varepsilon,y)-F(x-\varepsilon,y)}{F_X(x+\varepsilon)-F_X(x-\varepsilon)}$　　多元随机向量.

独立性: $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y).\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$

4. 随机向量的运算：

(1). 加减：(i). 离散型随机向量：

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij} \qquad Z:=X+Y$$

$$P(Z=z_k)=\sum_{i,j:x_i+y_j=z_k} p_{ij}$$

(ii). 连续型随机向量：

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\int_{x+y\le z} p(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} p(x,y)\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y-x)\,dx\,dy$$

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,z-x)\,dx \xlongequal{X,Y\text{独立}} \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z-x)\,dx.$$

(2). 减法：连续型随机向量：$Z:=Y-X$.

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p(x,z+x)\,dx$$

例：$X\sim P(\lambda)$. $Y\sim P(\mu)$. X,Y独立. $Z=X+Y$.

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{l=0}^{k} P(X=l)P(Y=k-l)$$

$$=\sum_{l=0}^{k}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}\cdot\frac{\mu^{k-l}}{(k-l)!}e^{-\mu}=\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)}$$

例：$X,Y\sim U(0,1)$. X,Y独立. $Z=X+Y$.

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(z-x)\,dx=\begin{cases}\int_0^z dx=z, & 0<z\le 1 \quad (z-x\ge 0,\ x\ge 0)\\ \int_{z-1}^{1} dx=2-z, & 1<z<2 \quad (z-x\le 1,\ x\le 1)\end{cases}$$

例：$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. X,Y独立 $Z=X+Y$.

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} p_X(x)p_Y(z-x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}e^{-\frac{(z-(\mu_1+\mu_2))^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}$$

(3). 乘法：连续型随机向量：$Z=XY$. $\quad p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}p(x,\frac{z}{x})\,dx.$

(4). 除法：连续型随机向量：$Z=\frac{Y}{X}$ $\quad p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,p(x,xz)\,dx$

例：$X,Y\sim U(0,1)$ 相互独立. $Z=XY$. $Z=\frac{Y}{X}$

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x}p(x,\frac{z}{x})\,dx=\int_z^1\frac{1}{x}\,dx=|\ln z|. \quad (x,\frac{z}{x}\in[0,1])$$

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,p(x,xz)\,dx=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{z}} x\,dx=\frac{1}{2z^2}, & z\ge 1\\ \int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}, & 0<z<1\end{cases}$$

例：$X,Y\sim N(0,1)$. 相互独立. $Z=\frac{Y}{X}$.

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,p(x,xz)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2x^2}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2(1+z^2)}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+z^2} \qquad \text{Cauchy 分布}$$

(5). 变换：X, Y是连续型随机变量，联合密度 $p_{X,Y}(x,y)$.

$$\begin{cases} U=f_1(X,Y) \\ V=f_2(X,Y) \end{cases}$$ 求 (U,V) 的分布.

解：$$\begin{cases} X=g_1(U,V) \\ Y=g_2(U,V) \end{cases} \quad J=\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$p_{U,V}(u,v)=p_{X,Y}(g_1(U,V),g_2(U,V))|J|.$$

例：$X,Y\sim \exp(1)$ 相互独立. $U=X+Y,\ V=\frac{Y}{X}$.

$$\begin{cases} U=X+Y \\ V=\frac{Y}{X} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X=\frac{U}{1+V} \\ Y=\frac{UV}{1+V} \end{cases} \quad J=\frac{u}{(1+v)^2},\quad p_{X,Y}(x,y)=e^{-(x+y)}$$

$$p_{U,V}(u,v)=e^{-(\frac{u}{1+v}+\frac{uv}{1+v})}\frac{u}{(1+v)^2}=ue^{-u}\cdot\frac{1}{(1+v)^2}\cdot I\{u,v>0\}$$ $\Rightarrow U,V$ 相互独立

(6). 极值：$X_{(1)}$ 为极小值，$X_{(k)}$ 为第k小值，$X_{(n)}$ 为极大值. $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立

极大值：$$F_{X_{(n)}}(x)=P(X_{(n)}\le x)=P(\max_{1\le i\le n}X_i\le x)=P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i\le x\})$$
$$=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\le x)=F^n(x).$$
$$p_{X_{(n)}}(x)=nF^{n-1}(x)f(x)$$

极小值：$$P(X_{(1)}>x)=P(\min_{1\le i\le n}X_i>x)=P(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i>x\})$$
$$=\prod_{i=1}^{n}P(X_i>x)=(1-F(x))^n$$
$$F_{X_{(1)}}(x)=1-P(X_{(1)}>x)=1-(1-F(x))^n$$
$$p_{X_{(1)}}(x)=n(1-F(x))^{n-1}f(x).$$

求极大与极小的联合密度：关于两变量分别求偏导

$$p(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

* 第k小值：$$p_{X_{(k)}}(x)=(n-k+1)C_n^{k-1}F^{k-1}(x)\,p(x)\,(1-F(x))^{n-k}$$

第三章 数字特征

1. 数学期望

(i). 离散型随机变量：$EX=\sum_{k=1}^{N}x_kp_k$

(1). Poisson分布：$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\frac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda.$$

(2). 几何分布：$$EX=\sum_{k=1}^{\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}kp(1-p)^{k-1}=\frac{1}{p}.$$

(ii). 连续型随机变量：$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xp(x)dx$

(1). 正态分布：$EX=0$.

(2). 指数分布：$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)dx=\int_0^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty}xe^{-x}dx=\frac{1}{\lambda}.$$

性质：(1). 线性性：$E(a+bX)=a+bEX$.

(2). 加法原理：$E(X+Y)=EX+EY$

(3). 函数变换：(i). 离散型：$P(X=x_k)=p_k$，$Ef(X)=\sum_{k=1}^{N}f(x_k)p_k$.

(ii). 连续型：$$Ef(X)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)p(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dF(x)$$

2. 方差：$VarX = E(X-EX)^2 = EX^2-(EX)^2$. $EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx$. $VarX=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-EX)^2 p(x)dx$.

(1). Poisson分布：$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$. $EX=\lambda$.

$$EX^2=\sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-2)!}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

$VarX=\lambda$.

(2). 指数分布：$p(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $EX=\frac{1}{\lambda}$

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx$$
$$=\int_0^{\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{2}{\lambda^2}.$$

$VarX=\frac{1}{\lambda^2}$.

(3). 正态分布：$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. $EX=0$.

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1.$$

$VarX=1$.

性质：(1). 非线性性：$Var(a+bX)=b^2VarX$.

(2). 加法：$Var(X+Y)=VarX+VarY+2(EXY-EXEY)$ $Var(\sum_{i=1}^n X_i)=\sum_{i=1}^n VarX_i+2\sum_{1<i<j\le n}Cov(X_i,X_j)$

(3). 独立性：若X, Y独立 $Var(X+Y)=VarX+VarY$.

3. Chebyschev不等式：$\forall\varepsilon>0.\ P(|X-EX|>\varepsilon)\le\frac{VarX}{\varepsilon^2}$.

推广：$\forall\varepsilon>0.\ P(X>\varepsilon)\le\frac{Ef(X)}{f(\varepsilon)}$ f单调不减，f>0

应用：$S_n\sim B(n,p)$

$$P(|\frac{S_n}{n}-p|>\varepsilon)\le\frac{Var(\frac{S_n}{n})}{\varepsilon^2}=\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$$
($Var(\frac{S_n}{n})=\frac{np(1-p)}{n^2}$)

4. 协方差：$Cov(X,Y)=E(X-EX)(Y-EY)=EXY-EXEY$.

协方差阵 $\Sigma=\begin{pmatrix}VarX & Cov(X,Y)\\ Cov(X,Y) & VarY\end{pmatrix}$

$Cov(X,Y)=0$. 表示 X, Y不相关 $\not\Leftrightarrow$ 独立.

例：$\theta\sim U(0,2\pi)$. $X=\sin\theta$, $Y=\cos\theta$. $r=0$.

对二元联合正态分布. $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$ $Cov(X,Y)=\rho\sigma_1\sigma_2$.

相关系数：$r=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{VarX\cdot VarY}}$

5. 条件期望：

(i). 离散型随机变量：$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$

$$E(X|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{\infty}x_iP(X=x_i|Y=y_j)$$

(ii). 连续型随机变量：$P(X=x|Y=y)=\frac{p(x,y)}{p_Y(y)}=p_{X|Y}(x|y)$

$$E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}xP(X=x|Y=y)dx$$

全期望公式：$E(E(X|Y))=EX$

$E(E(Y|X))=EY$

6. 矩：定义 k阶矩：EX^k

k阶中心矩：$E(X-EX)^k$.

例：$X\sim N(0,\sigma^2)$.

$EX^{2k}=(2k-1)!!\,\sigma^{2k}$. $EX^{2k+1}=0$. $k\geq 1$.

7. 特征函数：$X\sim F_X(x)$. $\varphi(t)=Ee^{itX}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x)$.

(i). 离散型随机变量：

(1). 退化分布：$P(X=c)=1$. $\varphi(t)=e^{ict}$

(2). 两点分布：$P(X=1)=p$, $P(X=0)=1-p$. $\varphi(t)=pe^{it}+1-p$.

(3). 二项分布：$X\sim B(n,p)$.

$$\varphi(t)=Ee^{itX}=\sum_{k=0}^{n}e^{itk}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(1-p+pe^{it})^n$$

(4). Poisson 分布：$X\sim P(\lambda)$.

$$\varphi(t)=Ee^{itX}=\sum_{k=0}^{\infty}e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

(ii). 连续型随机变量：

(1). 均匀分布：$X\sim U(a,b)$.

$$\varphi(t)=Ee^{itX}=\int_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx=\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$$

(2). 指数分布：$X\sim exp(\lambda)$.

$$\varphi(t)=Ee^{itX}=\int_0^{\infty}e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{\lambda}{\lambda-it}.$$

$X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$\varphi(t)=e^{it\mu-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

(3). 正态分布：$X\sim N(0,1)$.

$$\varphi(t)=Ee^{itX}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}i\sin tx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\dots=e^{-\frac{t^2}{2}}$$

性质：$\varphi(0)=1$. $|\varphi(t)|\leq 1$. $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$. $\varphi(t)$在$\mathbb{R}$上一致连续。

(1). $Ee^{it(aX+c)}=e^{itc}\varphi_X(at)$. 例：$Y\sim N(\mu,\sigma^2)\Leftrightarrow Y=\sigma X+\mu$. $X\sim N(0,1)$.

$$\varphi_Y(y)=Ee^{it(\sigma X+\mu)}=e^{it\mu-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

(2). $Z=X+Y$, 则 $\varphi_Z(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)$. ($X,Y$相互独立) （二项分布=两点分布^n）

(3). 唯一性定理：$\varphi_X(t)=\varphi_Y(t)\Leftrightarrow X\overset{d}{=}Y$, $F_X(x)=F_Y(y)$.

推论：$\varphi(t)$绝对可积, $p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt$.

$\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{ikt}$, 则 $P(X=k)=a_k$. ($\sum a_k=1$)

利用唯一性定理计算随机变量的分布

例1. $\varphi(t)=e^{-|t|}$

$$p(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}e^{-|t|}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-t(ix+1)}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}e^{t(1-ix)}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-1}{ix+1}e^{-t(ix+1)}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{1-ix}e^{t(1-ix)}\Big|_{-\infty}^{0}\right)=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{ix+1}+\frac{1}{1-ix}\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

例2. $\varphi(t)=\cos t=\frac{1}{2}e^{it}+\frac{1}{2}e^{-it}$ $\quad P(X=1)=\frac{1}{2},\ P(X=-1)=\frac{1}{2}$.

例3. $X_k\sim N(\mu_k,\sigma_k^2)$. $Z=\sum_{k=1}^{n}X_k$.

$$\varphi_Z(t)=Ee^{itZ}=\prod_{k=1}^{n}Ee^{itX_k}=\prod_{k=1}^{n}e^{it\mu_k-\frac{\sigma_k^2t^2}{2}}=e^{it\sum_1\mu_k-\frac{\sum_1\sigma_k^2\cdot t^2}{2}}$$

$\Rightarrow Z\sim N(\mu,\sigma^2)$. $\mu=\sum_1\mu_k$, $\sigma^2=\sum_1\sigma_k^2$.

二元随机向量的特征函数：$\phi(t_1,t_2)=Ee^{i(t_1X+t_2Y)}$

当X,Y相互独立时. $\phi(t_1,t_2)=\phi_X(t_1)\phi_Y(t_2)$

第四章 概率极限理论

1. 大数律：

(1). 伯努利大数律. $S_n\sim B(n,p)$.

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-p\right|>\varepsilon\right)\to0,\ n\to\infty.$$

(2). 切比雪夫大数律：一列随机变量$\{\xi_k\}$. $E\xi_k=\mu$, $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. $\frac{\mathrm{Var}S_n}{n^2}\to0$.

(要求方差存在) $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}\mu,\ n\to\infty$

推广：$E\xi_k=\mu_k$. $\frac{\mathrm{Var}S_n}{n^2}\to0$

$$\frac{S_n}{n}-\frac{\sum_{k=1}^{n}\mu_k}{n}\to0,\ n\to\infty.$$

(3). 辛钦大数律. $\{\xi_k\}$是一列独立同分布的随机变量 $E\xi_k=\mu$. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$.

(要求独立同分布) $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{P}\mu$.

2. 中心极限定理：

(1) 棣莫弗—拉普拉斯中心极限定理。$S_n\sim B(n,p)$ $\quad\frac{S_n-np}{\sqrt{npq}}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

(2). Poisson极限定理：$S_n\sim B(n,p_n)$. $np_n\to\lambda$. $0<\lambda<1$.

$\forall k=0,1,2,\cdots$ $P(S_n=k)\to\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $n\to\infty$ 二项分布的泊松逼近.

(3). Levy-Feller中心极限定理：$\{\xi_k\}$是一列独立同分布的随机变量, $E\xi_k=\mu$, $\mathrm{Var}\xi_k=\sigma^2$. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$.

$\forall x$, $P\left(\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le x\right)\to\Phi(x)$. 即 $\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

(4). Lyapunov中心极限定理：$\{\xi_k\}$是一列独立随机变量, $E\xi_k=\mu_k$. $\mathrm{Var}\xi_k=\sigma_k^2$. $S_n=\sum_{k=1}^{n}\xi_k$. $B_n=\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$.

若$B_n\to\infty$, $E|X_k|^3<\infty$, $\frac{\sum_{k=1}^{n}E|X_k|^3}{B_n^{\frac{3}{2}}}\to0,\ n\to\infty$.

则对$\forall x$. $P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\mu_k)}{\sqrt{B_n}}\le x\right)\to\Phi(x)$. 即 $\frac{\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-\mu_k)}{\sqrt{B_n}}\xrightarrow{d}N(0,1)$.

3. 收敛性：

联系切比雪夫不等式（如果 $\mathrm{Var}X$ 存在且=0）

(1). 依概率收敛：对 $\forall \varepsilon>0$. $P(|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon)\to 0$, $n\to\infty$. $\Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X$.

判别法则：$\exists r>0$. s.t. $E|X_n-X|^r\to 0$, $n\to\infty$. 则 $X_n\xrightarrow{P}X$.

性质：加减乘除.

连续映射. 例：$\{\xi_k\}$ 独立同分布. $\xi_k\sim U(0,1)$. $\eta_n=(\prod_{k=1}^n \xi_k)^{\frac{1}{n}}$. 求证：$\eta_n\xrightarrow{P}c$, $n\to\infty$

解：$\log\eta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \log\xi_k \underset{\text{辛钦}}{\xrightarrow{P}} E\log\xi_1=\int_0^1\log x\,dx=-1$

$\eta_n\xrightarrow{P}e^{-1}$

(2). 依分布收敛：对 F 的每一个连续点 x, $F_n(x)\to F(x)$. $n\to\infty$. $\Rightarrow F_n\xrightarrow{d}F$, $X_n\xrightarrow{d}X$.

$X_n\xrightarrow{P}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{d}X$. 反之不成立. 但 $X_n\xrightarrow{d}c\Rightarrow X_n\xrightarrow{P}c$.

判别法则：[Levy连续性定理] $X_n\xrightarrow{d}X \Leftrightarrow \varphi_n(t)\to\varphi(t)$

性质：线性性

连续映射.

例：$\{\xi_k\}$ 是一列独立同分布随机变量 $P(\xi_k=\pm1)=\frac{1}{2}$. $U_n=\sum_{k=1}^n\frac{\xi_k}{2^k}$. 试证：$U_n\to U\sim U(-1,1)$.

证：$\varphi_n(t)=Ee^{itU_n}=\prod_{k=1}^n Ee^{it\frac{\xi_k}{2^k}}$

$=\prod_{k=1}^n\frac{1}{2}(e^{\frac{it}{2^k}}+e^{-\frac{it}{2^k}})=\prod_{k=1}^n\cos\frac{t}{2^k}$.

$\varphi(t)=Ee^{itU}=\int_{-1}^1 e^{itx}dx=\frac{1}{it}(e^{it}-e^{-it})=\frac{\sin t}{t}$.

下证 $\prod_{k=1}^n\cos\frac{t}{2^k}\to\frac{\sin t}{t}$, $n\to\infty$. $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$. $\frac{\sin\theta}{\theta}\to1$

$\prod_{k=1}^n\cos\frac{t}{2^k}=\frac{1}{\sin\frac{t}{2^n}}\prod_{k=1}^n\cos\frac{t}{2^k}\sin\frac{t}{2^n}=\frac{1}{\sin\frac{t}{2^n}}\cdot\frac{\sin t}{2^n}\to\frac{2^n}{t}\cdot\frac{\sin t}{2^n}=\frac{\sin t}{t}$.

(3). 几乎处处收敛：$\exists\Omega_0$. $P(\Omega_0)=0$. 且对 $\forall\omega\in\Omega\setminus\Omega_0$. $X_n(\omega)\to X(\omega)$, $n\to\infty$. $\Rightarrow X_n\to X$, a.s. (almost surely)

判别法则：$X_n\to X$, a.s. $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$. $P(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\})=0$. (轨迹)

$\Leftrightarrow \lim_{N\to\infty}P(\bigcup_{n=N}^{\infty}\{|X_n(\omega)-X(\omega)|>\varepsilon\})=0$.

Borel 大数律：$\{\xi_k\}$ 是一列独立同分布随机变量 $P(\xi_k=1)=p$, $P(\xi_k=0)=1-p$. $S_n=\sum_{k=1}^n\xi_k$.

则 $\frac{S_n}{n}\to p$, a.s.

柯尔莫哥洛夫强大数律：$\{\xi_k\}$ 是一列独立同分布随机变量. $E\xi_k=\mu$. $S_n=\sum_{k=1}^n\xi_k$.

则 $\frac{S_n}{n}\to\mu$, a.s.